Teoria das Categorias **Bacharelado em Ciência da Computação**
Aluno: Igor de Araujo Vilhalba **Data: 22/09/2022**

Lista 1

Questão 1

Para mostrarmos que dada especificação $\mathcal{C}$ é, de fato, uma categoria, precisamos mostrar que ela satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\forall x \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) : cod_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x)) = x = dom_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x))$

(ii) $\forall f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \rhd g \Rightarrow dom_{\mathcal{C}}(g \circ f) = dom_{\mathcal{C}}(f)$ & $cod_{\mathcal{C}}(g \circ f) = cod_{\mathcal{C}}(g)$

(iii) $\forall f, g, h \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \rhd g$ & $g \rhd h \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(iv) $\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \circ id_{\mathcal{C}}(dom_{\mathcal{C}}(f)) = f = id_{\mathcal{C}}(cod_{\mathcal{C}}(f)) \circ f$

(a) Vamos mostrar, uma por uma, que essas propriedades são satisfeitas por $\mathcal{C}$.

(i) Temos que cada objeto $x \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ é um conjunto S e que $id_{\mathcal{C}}(x)$ é uma função $id_S : S \to S$, que é identidade em S. Se temos $dom(S) = cod(S) = S$ e $S = x$, então $cod_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x)) = x = dom_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x))$.

(ii) Para algum par de setas $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$, tal que $f \rhd g$. Digamos que $dom_{\mathcal{C}}(f) = A$, $cod_{\mathcal{C}}(f) = B$, $dom_{\mathcal{C}}(g) = B$ e $cod_{\mathcal{C}}(g) = C$, tal que $A, B, C \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ e os objetos A, B, C são os conjuntos S_A, S_B e S_C e que f e g são funções $f : S_A \to S_B$ e $g : S_B \to S_C$. Pela definição de $\circ$ para funções, temos que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)), x \in S_A \\ &= g(y), y \in S_B \\ &= z, z \in S_C\end{aligned} \tag{1}$$

Isso nos mostra que $dom(f \circ g) = S_A = dom(f)$ e que $cod(g \circ f) = S_C = cod(g)$. Já que os conjuntos S_A, S_B e S_C são os objetos A, B, C, temos que vale a propriedade **(ii)**.

(iii) Vamos considerar os mesmos $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ do item anterior e vamos acrescentar $h \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ tal que $dom_{\mathcal{C}}(h) = cod_{\mathcal{C}}(g)$ (ou seja, $g \rhd h$). Não importa muito especificar os *cod* e *dom* nesse caso.
Vamos começar por definif $\sigma = g \circ f$ e $\tau = h \circ g$.
Podemos verificar que que $(h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ \sigma)(x) = h(\sigma(x)) = h(g(f(x)))$.
Por outro lado, temos $((h \circ g) \circ f)(x) = (\tau \circ f)(x) = \tau(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$.
Dessa forma, temos que $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$, o que nos mostra que nossa categoria satisfaz a propriedade **(iii)**.

(b) Sim. Essa categoria é essencialmente igual à da letra (a). A única diferença é que ao passo que a categoria anterior tem como setas **todas** as funções, esta tem um subconjunto delas. Ainda assim, a quantidade de setas é infinita. As duas categorias possuem a mesma "cara", mudando apenas quais são as setas que as compõe.

(c) Este é exatamente o mesmo caso da letra (b). A única diferença é que agora temos funções não mais n-limitadas, mas 1-limitadas. Ainda assim, a quantidade de setas é infinita.

(d) Vamos mostrar que essa categoria satisfaz as propriedades **i** a **iv** listadas no item **(a)**.

(i) Para algum objeto V, que representa o vértice v, temos que $id_{\mathcal{C}}(V)$ é um passeio (v, a_{id}, v). Sendo assim, $cod_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(V)) = v = dom_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(V))$.

(ii) Se f e g são passeios e $f \rhd g$, então podemos defini-los, de forma geral, da seguinte forma:

$$f = (v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k) \quad \text{e} \quad g = (v_k, a_k, v_{k+1}, ..., a_{n-1}, v_n)$$

e pela definição dada de composta, temos que $g \circ f$ é o passeio

$$g \circ f = (v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k, a_k, v_{k+1}, ..., a_{n-1}, v_n)$$

por simplicidade, podemos omitir os vértices de "junção" e escrever apenas

$$g \circ f = (v_0, a_0, v_1, ..., a_{n-1}, v_n)$$

Podemos ver que $cod_{\mathcal{C}}(g \circ f) = v_{n-1} = cod_{\mathcal{C}}(g)$ e que $dom_{\mathcal{C}}(g \circ f) = v_0 = dom_{\mathcal{C}}(f)$.

(iii) A partir do resultado obtido para a composta, reutilizando os passeios f e g do item anterior e introduzindo um novo, h, que é definido como $h = (v_n, a_n, ..., a_{m-1}, v_m)$, vamos mostrar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
Já vimos que $g \circ f = g \circ f = (v_0, a_0, v_1, ..., a_{n-1}, v_n)$. Pela definição de composição de caminhos, temos que $h \circ (g \circ f)$ equivale a:

$$(v_n, a_n, ..., a_{m-1}, v_m) \circ (v_0, a_0, v_1, ..., a_{n-1}, v_n) = (v_0, a_0, ..., a_{n-1}, v_n, a_n, ..., a_{m-2}, v_{m-1})$$

ou, resumidamente

$$(v_0, a_0, ..., a_{m-1}, v_m)$$

Agora vamos verificar o resultado de $(h \circ g) \circ f$.

$$\begin{aligned} h \circ g &= (v_n, a_n, ..., a_{m-1}, v_m) \circ (v_k, a_k, v_{k+1}, ..., a_{n-1}, v_n) \\ &= (v_k, a_k, ..., a_{n-1}, v_n, a_n, ..., a_{m-1}, v_m) \\ &\text{e} \\ (h \circ g) \circ f &= (v_k, a_k, ..., a_{n-1}, v_n, a_n, ..., a_{m-1}, v_m) \circ (v_0, a_0, ..., a_{k-1}, v_k) \\ &= (v_0, a_0, ..., a_{k-1}, v_k, a_k, ..., a_{n-1}, v_n, a_n, ..., a_{m-1}, v_m) \end{aligned} \tag{2}$$

que pode ser reescrito como

$$(v_0, a_0, ..., a_{m-1}, v_m)$$

e, portanto, concluimos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(iv) Temos que $f = (v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k)$ e, portanto, $dom_{\mathcal{C}}(f) = v_0$ e $cod_{\mathcal{C}}(f) = v_k$.
Da forma como $id_{\mathcal{C}}$ foi definida, temos que $id_{\mathcal{C}}(v_0) = (v_0, a_{id_0}, v_0)$ e, analogamente, $id_{\mathcal{C}}(v_k) = (v_k, a_{id_k}, v_k)$.
Vamos verificar se $\underbrace{f \circ id_{\mathcal{C}}(v_0)}_{①} = f = \underbrace{id_{\mathcal{C}}(v_k) \circ f}_{②}$.

$$\begin{aligned} ① &= (v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k) \circ (v_0, a_{id}, v_0) \\ &= (v_0, a_{id}, v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k) \\ &\neq \underbrace{(v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k)}_{f} \\ ② &= (v_k, a_{id}, v_k) \circ (v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k) \\ &= (v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k, a_{id_k}, v_k) \\ &\neq \underbrace{(v_0, a_0, v_1, ..., a_{k-1}, v_k)}_{f} \end{aligned} \tag{3}$$

Este último passo nos diz que essea especificação não configura uma categoria!

(e) Já podemos concluir que não é uma categoria pela definição de $id_{\mathcal{C}}$, que é um passeio que sai de um vértice e vai para ele mesmo (vai contra a definição de caminho, que diz que não pode nem passar duas vezes por um vértice, nem em uma seta).

(f) Temos aqui uma categoria $\mathcal{C}^{op}$ cujas únicas diferenças para a categoria $\mathcal{C}$ são:

- $dom_{op} = cod_{\mathcal{C}}$
- $cod_{op} = dom_{\mathcal{C}}$
- $f \circ_{op} g = g \circ f$

Como sabemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria, sabemos também que todas as propriedades mencionadas anteriormente valem. Nos resta verificar se elas continuam velendo para a categoria $\mathcal{C}^{op}$.

(i) Já podemos ver que a a primeira propriedade continua sendo satisfeita. Se, em $\mathcal{C}$, temos que

$$\forall x \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) : cod_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x)) = x = dom_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x))$$

e pela definição de $\mathcal{C}^{op}$ que $cod_{op} = cod_{\mathcal{C}}$ e $dom_{op} = dom_{\mathcal{C}}$, podemos que, para $\mathcal{C}^{op}$ vale o seguinte:

$$\forall x \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) : dom_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x)) = x = cod_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(x))$$

o que significa exatamente a mesma coisa e, portanto, a propriedade é satisfeita para essa categoria.

(ii) Para verificar se essa segunda propriedade é satisfeita, vamos reescrevê-la apenas expandindo a notação $\rhd$ urilizada e trocando $cod_{\mathcal{C}}$ por cod_{op}, $dom_{\mathcal{C}}$ por dom_{op} e $\circ$ por $\circ_{op}$ e em seguida vamos substití-los de volta:

$$\forall f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : cod_{op}(f) = dom_{op}(g) \Rightarrow dom_{op}(g \circ_{op} f) = dom_{op}(f) \quad \& \quad cod_{op}(g \circ_{op} f) = cod_{op}(g)$$

que equivale a

$$\forall f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : dom_{\mathcal{C}}(f) = cod_{\mathcal{C}}(g) \Rightarrow cod_{\mathcal{C}}(f \circ g) = cod_{\mathcal{C}}(f) \quad \& \quad dom_{\mathcal{C}}(f \circ g) = dom_{\mathcal{C}}(g)$$

Temos, então, que essa propriedade também permanece sendo satisfeita.

(iii) Vamos verificar se essa propriedade continua valendo para a nova categoria $\mathcal{C}^{op}$. O exercício anterior indica que podemos definir um $\rhd_{op}$, tal que $g \rhd_{op} f = f \rhd g$. Sendo assim, podemos reescrever a terceira propriedade a ser satisfeita da seguinte forma:

$$\forall f, g, h \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) : f \rhd_{op} g \ \& \ g \rhd_{op} h \Rightarrow h \circ_{op} (g \circ_{op} f) = (h \circ_{op} g) \circ_{op} f$$

ou, alternativamente

$$\forall f, g, h \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) : g \rhd f \ \& \ h \rhd g \Rightarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

portanto, concluimos que essa propriedade continua sendo satisfeita pela categoria *dual*.

(iv) Por fim, precisamos mostrar que

$$\begin{gathered} \forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \circ_{op} id_{\mathcal{C}}(dom_{op}(f)) = f = id_{\mathcal{C}}(cod_{op}(f)) \circ_{op} f \\ id_{\mathcal{C}}(cod_{\mathcal{C}}(f)) \circ f = f = f \circ id_{\mathcal{C}}(dom_{\mathcal{C}}(f)) \end{gathered} \tag{4}$$

que é exatamente como a propriedade é enunciada para a categoria $\mathcal{C}$.

Questão 4

(a) Temos que se há um homomorfismo Hom de um monoide, ele nos leva a um novo monoide $(M_{Hom}, *_{Hom}, e_{Hom})$ tal que

(i) $\forall x \in M \ \ \exists x' \in M_{Hom} : x' = Hom(x)$

(ii) $(x * y) * z = x * (y * z) \Rightarrow (x' *_{Hom} y') *_{Hom} z' = x' *_{Hom} (y' *_{Hom} z')$

(iii) $x' * e_{Hom} = x' = e_{Hom} * x'$

(b) Vamos verificar se a especificação satisfaz as propriedades listadas na **Questão 1**.

(i_{Q1}) Já que essa categoria possui apenas um objeto, podemos reescrever essa propriedade como

$$cod_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(\bullet)) = \bullet = dom_{\mathcal{C}}(id_{\mathcal{C}}(\bullet))$$

Podemos ver que isso vale, pois $dom_{\mathcal{C}}$ e $cod_{\mathcal{C}}$ têm como saida $\bullet$ **independentemente** da entrada.

(ii_{Q1}) A propriedade

$$\forall f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \rhd g \Rightarrow dom_{\mathcal{C}}(g \circ f) = dom_{\mathcal{C}}(f) \ \& \ cod_{\mathcal{C}}(g \circ f) = cod_{\mathcal{C}}(g)$$

também vale para essa categoria, já que $dom_{\mathcal{C}}$ e $cod_{\mathcal{C}}$ são constantes e possuem a mesma saída.

(iii$_{Q1}$) Da forma que foi foram definidas as setas e a composição, podemos reescrever a propriedade

$$\forall f, g, h \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) : f \rhd g \ \& \ g \rhd h \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

como

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) : x \rhd y \ \& \ y \rhd z \Rightarrow z \circ (y \circ x) = (z \circ y) \circ x$$

ou até mesmo

$$\forall x, y, z \in M : z \circ (y \circ x) = (z \circ y) \circ x$$

Isso concorda com a propriedade de *associatividade* do monoide.

(iv$_{Q1}$) Por fim, temos que mostrar que $\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \circ id_{\mathcal{C}}(dom_{\mathcal{C}}(f)) = f = id_{\mathcal{C}}(cod_{\mathcal{C}}(f)) \circ f$
Já vimos que tanto $cod_{\mathcal{C}}$ quanto $dom_{\mathcal{C}}$ têm $\bullet$ como saída. Portanto, reescrevemos a propriedade como

$$\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \circ id_{\mathcal{C}}(\bullet) = f = id_{\mathcal{C}}(\bullet) \circ f$$

e temos que $id_{\mathcal{C}}(\bullet) = e$ e, portanto, se substituirmos $f \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ por $x \in M$, temos que

$$\forall x \in M : x \circ e = x = e \circ x$$

que é exatamente a propriedade de *elemento neutro* do monoide.
Como todas essas propriedades valem para a especificação, temos que ela é, de fato, uma categoria!

Questão 7

Questão 8

(c)

- Temos que $X \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{C})$ e $Y \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Os universos da subcategoria são subconjuntos dos universos da categoria original;
- Se considerarmos $cod'_{\mathcal{C}}$, $dom'_{\mathcal{C}}$, $id'_{\mathcal{C}}$ e $\circ'$ as operações em elementos dos universos da subcategoria, temos que são exatamente como as operações correspondentes na categoria original;
- Pela definição, temos que $\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : dom_{\mathcal{C}}(f) \in X \ni cod_{\mathcal{C}}(f) \Rightarrow f \in Y$.
  Se considerarmos todas as relações $R(A, B)$, tais que $A, B \in X$ e $\exists f \in Y : dom'_{\mathcal{C}}(f) = A \ \& \ cod'_{\mathcal{C}}(f) = B$, temos que elas são preservadas se considerarmos os universos e as operações da categoria original.

(d) Por simplicidade, vamos utilizar $dom_{\mathcal{C}}$, $cod_{\mathcal{C}}$, $id_{\mathcal{C}}$ e $\circ$ para ambas as categorias, já que as correspondentes são equivalentes.
Precisamos garantir apenas que:

- $\forall f \in Y : dom_{\mathcal{C}}(f) \in X \ni cod_{\mathcal{C}}(f)$ (**Obs.:** não parece fazer sentido que f tenha como domínio ou contradomínio algum $A : A \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) \ \& \ A \notin X$)
- $\forall A \in X : id_{\mathcal{C}}(A) \in Y$

Todas as demais propriedades já são garantidas pelo fato de X ser um subconjunto de $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ e Y ser subconjunto de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.
Em outras palavras, a respeito da primeira propriedade descrita, precisamos apenas garantir que **pelo menos** as identidades de todos os objetos da subcategoria estejam presentes. Caso contrário, não seria uma categoria!

Questão 9

(b)

Questão 12

Vamos considerar a categoria $\mathcal{C}$ como na questão 4 e um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Temos para funtores as seguintes propriedades:

1. $\forall X \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) : F(X) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$
2. $\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : F(f) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$
3. $f : X \to Y \Rightarrow F(f) : F(X) \to F(Y)$ para todo $f \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ que tem $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ como domínio e $Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ como codomínio.
4. $\forall X \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) : F(id_{\mathcal{C}}(X)) = id_{\mathcal{D}}(F(X))$
5. $\forall f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : f \rhd g \Rightarrow F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{D}} F(f)$

No exercício 4, dissemos que as seguintes propriedades deveriam ser satisfeitas para que houvesse um homomorfismo entre monoides:

(i) $\forall x \in M \;\; \exists x' \in M_{Hom} : x' = Hom(x)$

(ii) $(x * y) * z = x * (y * z) \Rightarrow (x' *_{Hom} y') *_{Hom} z' = x' *_{Hom} (y' *_{Hom} z')$

(iii) $x' * e_{Hom} = x' = e_{Hom} * x'$

Vamos reescrevê-las para que condizam com o contexto de categorias

(i) $\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) \;\; \exists f' \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) : f' = F(f)$ (vale por 2.)

(ii) $(f \circ_{\mathcal{C}} g) \circ_{\mathcal{C}} h = f \circ_{\mathcal{C}} (g \circ_{\mathcal{C}} h) \Rightarrow (f' \circ_{\mathcal{D}} g') \circ_{\mathcal{D}} h' = f' \circ_{\mathcal{D}} (g' \circ_{\mathcal{D}} h')$ (vale por 5.)

(iii) $f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) : dom_{\mathcal{C}}(f) = X \;\; \& \;\; cod_{\mathcal{C}}(F) = Y \Rightarrow f' \circ_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{D}}(F(X)) = f' = id_{\mathcal{D}}(Y) \circ_{\mathcal{D}} f'$ (vale por 4.)